Průhyb nosníku - integrace ohybové čáry

Zatížení se vyjádří jako funkce souřadnice *x:* $q = f(x)$. Postupně se integruje pomocí statických, fyzikálních a geometrických podmínek pro ohyb prutu.

$$V(x) = \int -q dx + C_1$$

$$M(x) = \int V dx + C_2$$

$$\varphi(x) = \int -\frac{M}{EI} dx + C_3$$

$$w(x) = \int \varphi dx + C_4$$

Při integraci vzniknou čtyři integrační konstanty $C_1 - C_4$, které je možné určit z okrajových podmínek nosníku, tzn. ze známých hodnot veličin V, M, φ, w v na okrajích nosníku. Pro každý okraj je možné stanovit dvě veličiny.

POZN.: V případě staticky určitých nosníků 2 konstanty je možno určit při integraci prvních dvou statických podmínek. Často je místo prvních dvou kroků možno vyřešit průběh momentů obvyklým způsobem a pak určit jeho funkci z diagramu. V případě staticky neurčitých nosníků je nutno určit všechny konstanty až při integraci geometrických podmínek.

Složitější případ

Pokud nejsou zatížení nebo tuhost nosníku po celé délce nosníku popsány hladkou křivkou, je třeba nosník rozdělit na úseky, kde je toto splněno. V každém úseku se určí funkce ohybového momentu. Dvojnou integrací se získá rovnice pootočení a průhybu.

$$\varphi_i(x) = \int -\frac{M_i}{EI} dx + C_{i,1}$$

$$w_i(x) = \int \varphi_i dx + C_{i,2}$$

Při integraci v každém úseku vzniknou dvě integrační konstanty. K dispozici k jejich určení jsou kromě celkem dvou podmínek v podporách nosníku ještě dvě podmínky na každém rozhraní úseků. Tyto podmínky zajišťují spojitost pootočení a průhybu

$$\varphi_{i(x=x_i)} = \varphi_{i+1(x=x_i)}$$

$$w_{i(x=x_i)} = w_{i+1(x=x_i)},$$

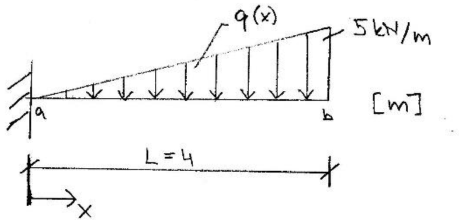
kde x_i je souřadnice konce *i*-tého úseku.

Příklad

Zadání:

Konzola o délce $L = 4m$ je zatížena spojitým příčným zatížením lineárně narůstajícím z nulové hodnoty v levém vetknutém konci *a* do hodnoty na volném konci b $q_b = 5kN/m$. Tuhost nosníku je konstantní po celé délce a je dána modulem pružnosti $E = 10\ GPa$ a momentem setrvačnosti průřezu $I = 4{,}5 \cdot 10^{-4} m^4$.

Metodou integrace ohybové čáry odvoďte rovnici průhybu w(x). Za počátek souřadného systému považujte levý vetknutý konec *a*. Pomocí odvozené rovnice určete číselně průhyb v místě volného konce *b*.



Řešení:

a) Tuhost nosníku a funkce zatížení

Výpočet tuhosti nosníku:

$$EI = 4{,}5 \cdot 10^6 = \frac{9}{2}10^6$$

$$\frac{1}{EI} = \frac{2}{9} \cdot 10^{-6}$$

Z hodnoty zatížení v bodě a $q_{(x=0)} = 0$ a v bodě b $q_{(x=4)} = 5kN/m$ určíme rovnici přímky, která popisuje zatížení jako funkci souřadnice x:

$$q(x) = \frac{5}{4} \cdot 10^3 x$$

b) Rovnice posouvající síly

Posouvající sílu určíme integrací záporně vzaté funkce zatížení. Při integraci vznikne integrační konstanta C_1.

$$V(x) = \int -q dx + C_1 = -\frac{5}{8} \cdot 10^3 x^2 + C_1$$

Podepření nosníku umožňuje napsat okrajovou podmínku pro posouvající sílu – na nezatíženém volném konci je posouvající síla rovna nule. Můžeme tedy vyjádřit integrační konstantu C_1 už v této fázi výpočtu z podmínky pro volný konec nosníku.

$$V_{(x=L)} = 0$$

Dosadíme tedy za V nulu a za x délku 4m.

$$0 = -\frac{5}{8} \cdot 10^3 \cdot 4^2 + C_1$$

Z rovnice určíme hodnotu $C_1 = 10^4$.

Tu zpětně dosadíme a získáme finální rovnici posouvající síly

$$V(x) = -\frac{5}{8} \cdot 10^3 x + 10^4$$

c) Rovnice ohybového momentu

Ohybový moment určíme integrací rovnice posouvající síly. Při integraci vznikne integrační konstanta C_2.

$$M(x) = \int V dx + C_2 = -\frac{5}{24} \cdot 10^3 x^3 + 10^4 x + C_2$$

Podepření nosníku umožňuje napsat okrajovou podmínku pro ohybový moment – na nezatíženém volném konci je ohybový moment roven nule. Můžeme tedy vyjádřit integrační konstantu C_2 už v této fázi výpočtu z podmínky pro volný konec nosníku:

$M_{(x=L)} = 0$

Dosadíme tedy za M nulu a za x délku 4m

$0 = \frac{5}{24} \cdot 10^3 \cdot 4^3 + 10^4 \cdot 4 + C_2$

Z rovnice určíme hodnotu $C_2 = -\frac{80}{3} \cdot 10^3$

Tu zpětně dosadíme a získáme finální rovnici ohybového momentu

$$M(x) = -\frac{5}{24} \cdot 10^3 x^3 + 10^4 x - \frac{80}{3} \cdot 10^3 = 10^3 \left(-\frac{5}{24} x^3 + 10x - \frac{80}{3}\right)$$

d) Rovnice pootočení průřezu

Pootočení průřezu nosníku určíme integrací rovnice záporně vzatého ohybového momentu poděleného tuhostí EI. Při integraci vznikne integrační konstanta C_3.

$$\varphi(x) = \int -\frac{M}{EI} dx + C_3 = \frac{2}{9} \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 \left(\frac{5}{96} x^4 - 5x^2 + \frac{80}{3} x\right) + C_3$$

Podepření nosníku umožňuje napsat okrajovou podmínku pro pootočení – ve vetknutém konci je pootočení rovno nule. Můžeme tedy vyjádřit integrační konstantu C_3 už v této fázi výpočtu z podmínky pro levý konec nosníku:

$\varphi_{(x=0)} = 0$

Dosadíme tedy za φ nulu a za x také nulu

$0 = \frac{2}{9} \cdot 10^{-3} \left(\frac{5}{96} \cdot 0^4 - 5 \cdot 0^2 + \frac{80}{3} \cdot 0\right) + C_3$

Řešením je $C_3 = 0$.

Konstantu dosadíme zpětně do rovnice

$$\varphi(x) = \frac{2}{9} 10^{-3} \left(\frac{5}{96} x^4 - 5x^2 + \frac{80}{3} x\right)$$

a po úpravě dostáváme finální vyjádření rovnice pootočení

$$\varphi(x) = 10^{-3} \left(\frac{10}{9 \cdot 96} x^4 - \frac{10}{9} x^2 + \frac{160}{27} x\right)$$

e) Rovnice průhybu

Průhyb nosníku určíme integrací rovnice pootočení průřezu. Při integraci vznikne integrační konstanta C_4.

$$w(x) = \int \varphi dx + C_4 = 10^{-3} \left(\frac{2}{9 \cdot 96} x^5 - \frac{10}{27} x^3 + \frac{80}{27} x^2\right) + C_4$$

Podepření nosníku umožňuje napsat okrajovou podmínku pro průhyb – ve vetknutém konci je průhyb roven nule. Můžeme tedy vyjádřit integrační konstantu C_4 z podmínky pro levý konec nosníku:

$w_{(x=0)} = 0$

Dosadíme tedy za w nulu a za x také nulu

$$0 = 10^{-3}\left(\frac{2}{9\cdot 96}\cdot 0^5 - \frac{10}{27}\cdot 0^3 + \frac{80}{27}\cdot 0^2\right) + C_4$$

Řešením je $C_4 = 0$.

Dosadíme a získáváme finální vyjádření rovnice průhybu.

$$w(x) = 10^{-3}\left(\frac{1}{432}x^5 - \frac{10}{27}x^3 + \frac{80}{27}x^2\right)$$

f) Průhyb v konkrétním bodě nosníku

Pro stanovení průhybu v bodě b dosadíme jeho souřadnici $x = 4m$ do rovnice průhybu

$$w_b = w_{(x=4)} = 10^{-3}\left(\frac{1}{432}4^5 - \frac{10}{27}4^3 + \frac{80}{27}4^2\right) = 0{,}026074m = 26{,}074\ mm$$

Průhyb v bodě b je 26,074 mm.